

MA2001 - Cálculo en Varias Variables.**Profesor:** Alejandro Jofré. **Auxiliares:** Pedro Montealegre, César Vigouroux.

Control 1

Miércoles 22 de Abril de 2009

- P1.** a) (2 puntos) Sea A una matriz invertible $\in \mathcal{M}_{n \times n}$. Se define $n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como $n(x) = \|x\| + \|Ax\|$. Demuestre que n es una norma.
- b) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $x_0 \in A$ y $g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ función diferenciable en x_0 , tal que $\forall x \in A: f(x) - f(x_0) = \langle g(x), x - x_0 \rangle$.
- i) (2 puntos) Calcule $\nabla f(x_0)$
- ii) (2 puntos) Pruebe que f es diferenciable en x_0
- P2.** a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x}}$
- i) (1 punto) Determine $Dom(f)$, y haga un bosquejo de este.
- ii) (1 punto) Determine y haga un bosquejo de las curvas de nivel N_c para todo c .
- iii) (1 punto) Estudie continuidad de f .
- b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 1 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)^2$
- i) (2 puntos) Encuentre la ecuación del plano tangente al grafo de f en $(0, 1)$ y $(3, 4)$
- ii) (1 punto) Encuentre y bosqueje el conjunto $N_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0\}$ y (en el mismo dibujo) bosqueje la intersección del plano tangente a $(0, 1)$ con $z = 0$
- P3.** a) (3 puntos.) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$. Se define $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $F(x, y, z) = (z - xf^2(y + z), x + yf(xz^2))$. Calcule la matriz Jacobiana de F donde exista.
- b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2y, xy^2)$
- i) (0,5 puntos) Calcule el Jacobiano de f . Es f diferenciable? Justifique.
- ii) (2,5 puntos) Sea $f_n = f \circ f \circ \dots \circ f$ n veces (ie. $f_0 = id$, $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$, etc ...).
- Pruebe que el Jacobiano de f_n en $(1, 1)$ es $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n$

Tiempo: 3 Horas

MA2001 - Cálculo en Varias Variables.**Profesor:** Alejandro Jofré.**Auxiliares:** Pedro Montealegre, César Vigouroux.

Pauta Control 1

P1. a) Una función $n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dirá norma si $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

I) $n(x) \geq 0$ y $n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

II) $n(\alpha x) = |\alpha| n(x)$

III) $n(x + y) \leq n(x) + n(y)$

Demostremos que n cumple estas tres propiedades:

I) $n(x) \geq 0$, ya que $n(x) = \|x\| + \|Ax\|$, y como $\|\cdot\|$ es norma $\Rightarrow \|x\| \geq 0$ y $\|Ax\| \geq 0$.

PDQ: $n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

\Rightarrow Si $n(x) = 0 \Rightarrow \|x\| + \|Ax\| = 0 \Rightarrow (\|x\| = 0) \wedge (\|Ax\| = 0)$

$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, ya que $\|\cdot\|$ es norma. (0,8 pts)

$\|Ax\| = 0 \Rightarrow Ax = 0$, ya que $\|\cdot\|$ es norma. Además, como A es invertible, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

Luego, $n(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

\Leftarrow Si $x = 0 \Rightarrow (\|x\| = 0) \wedge (Ax = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0) \Rightarrow n(x) = 0$ (0,2 pts)

II) $n(\alpha x) = \|\alpha x\| + \|A(\alpha x)\| = |\alpha| \|x\| + \|\alpha(Ax)\| = |\alpha| \|x\| + |\alpha| \|Ax\| = |\alpha| n(x)$ (0,5 pts)

III) $n(x + y)$

$= \|x + y\| + \|A(x + y)\|$

$= \|x + y\| + \|Ax + Ay\|$

$\leq \|x\| + \|y\| + \|Ax\| + \|Ay\|$

$= \|x\| + \|Ax\| + \|y\| + \|Ay\|$

$= n(x) + n(y)$

Luego, $n(x + y) \leq n(x) + n(y)$ (0,5 pts)

b) Recordemos que para $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define el producto punto como: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.Además, una función $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se puede escribir en función de sus componentes:

$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$, con $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Luego, $\langle g(x), x - x_0 \rangle = \sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i - (x_0)_i)$

i) $f(x) = \langle g(x), x - x_0 \rangle + f(x_0)$

Sabemos que $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right)$ (0,2 pts).

Calculemos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^n g_i(x)(x - x_0)_i + f(x_0)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n g_i(x)(x - (x_0)_i)_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n g_i(x)(x - x_0)_i}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} (x - x_0)_i + g_i(x) \frac{\partial (x - x_0)_i}{\partial x_j} \right] = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} (x - x_0)_i + g_j(x) \right] \quad (0,8 \text{ pts}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} = g_j(x_0)$

$\Rightarrow \nabla f(x_0) = g(x_0)$ (1 pto)

ii) Como g es diferenciable

$\Rightarrow g$ es continua (0,5 pts)

$\Rightarrow g_i$ es continua $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ (0,5 pts)

$\Rightarrow f$ tiene derivadas parciales continuas en $x_0 \Rightarrow f$ es diferenciable en x_0 (1 pto)

P3.

- a) Escribamos F , en función de sus componentes: $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z))$, con $F_1(x, y, z) = z - xf^2(y + z)$ y $F_2(x, y, z) = x + yf(xz^2)$ (0,5 pts)

$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} DF_1 \\ DF_2 \end{pmatrix}$ (0,5 pts). Calculemos DF_1 y DF_2 :

$$DF_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -f^2(y + z) & -2xf(y + z)f'(y + z) & 1 - 2xf(y + z)f'(y + z) \end{pmatrix} \text{ (1 pto)}$$

$$DF_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + yz^2f'(xz^2) & f(xz^2) & 2xyzf'(xz^2) \end{pmatrix} \text{ (1pto)}$$

Luego,

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} -f^2(y + z) & -2xf(y + z)f'(y + z) & 1 - 2xf(y + z)f'(y + z) \\ 1 + yz^2f'(xz^2) & f(xz^2) & 2xyzf'(xz^2) \end{pmatrix}$$

- b) i) $Df(x, y) = \begin{pmatrix} Df_1 \\ Df_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$ (0,2 pts). f es diferenciable en todo su dominio,

ya que sus funciones componentes son diferenciables. Esto último, debido a que las derivadas parciales de las funciones componentes son continuas. (0,3 pts)

- ii) Razonemos por inducción:

Para $n = 1$, $f_1 = f \Rightarrow Df_1(1, 1) = Df(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^1$ (0,3 pts)

Suponemos que la igualdad se cumple para n , demostremos que se cumple para $n + 1$:

Como $f_{n+1} = f_n \circ f$ (0,2 pts) se tiene, por regla de la cadena, que:

$$Df_{n+1} = Df_n(f(1, 1))Df(1, 1) \text{ (1 pto)} \Rightarrow \text{como } f(1, 1) = (1, 1) \text{ y por hipótesis de}$$

$$\text{inducción: } Df_{n+1} = Df_n(1, 1)Df(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{n+1} \text{ (1 pto)}$$

Nota: Pueden haber definido $f_{n+1} = f \circ f_n$, en este caso al aplicar regla de la cadena queda $Df_{n+1} = Df(f_n(1, 1))Df_n(1, 1)$ y debían notar que

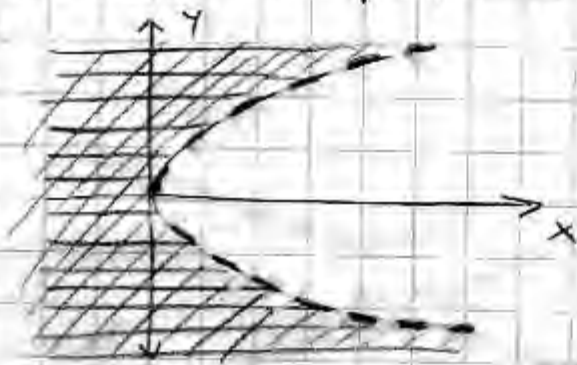
$$(1, 1) = f(1, 1) = f(f(1, 1)) = \dots = f_n(1, 1) \text{ y se concluye igual que antes.}$$

Se puede hacer este problema sin inducción, siempre y cuando se haya usado la regla de la cadena y estén bien explicados los pasos importantes (a los que se les asigna puntaje).

P2) a) i) $f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{y^2-x}}$

$$\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{y^2-x} \neq 0 \wedge y^2-x > 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \neq x \wedge y^2 > x\} \quad (0,5 \text{ pts})$$



(0,5 pts)

ii) Sea $c \in \mathbb{R}$.

$$N_c(f) = \{(x,y) \in \text{Dom}(f) \mid f(x,y) = c\}$$

$$= \{(x,y) \in \text{Dom}(f) \mid \frac{y}{\sqrt{y^2-x}} = c\}$$

$$\rightarrow y = c \cdot \sqrt{y^2-x} \quad |(\cdot)^2$$

$$\Rightarrow y^2 = c^2(y^2-x)$$

$$\Leftrightarrow y^2(1-c^2) = -c^2x$$

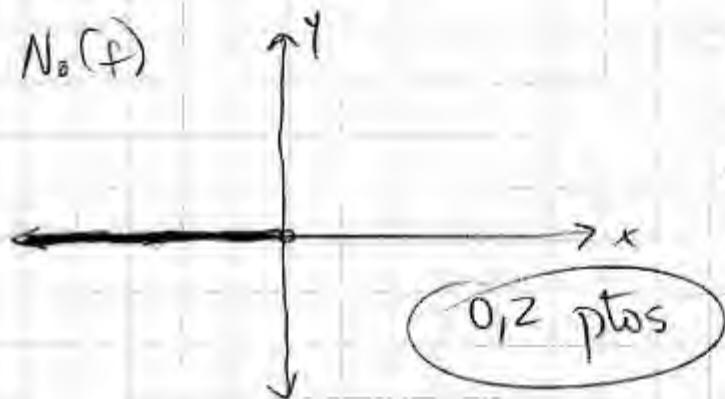
$$\Rightarrow x = \left(\frac{c^2-1}{c^2}\right) \cdot y^2 \quad \left(\Rightarrow \frac{c^2-1}{c^2} < 1\right)$$

$$\Rightarrow N_c(f) = \{(x,y) \in \text{Dom}(f) \mid x = \frac{c^2-1}{c^2} y^2\} \quad (0,2 \text{ pts})$$

$$c=0 \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{y^2-x}} = 0 \Rightarrow y=0 \wedge -x > 0$$

$$\Rightarrow y=0 \wedge x < 0$$

$$N_0(f) = \{(x,y) \in \text{Dom}(f) \mid (x,y) = (x,0), x < 0\}$$



¿cuáles son los c que se pueden encontrar al conzgar por f ?

$$\frac{c^2 - 1}{c^2} < 1 \Rightarrow c^2 - 1 < c^2$$

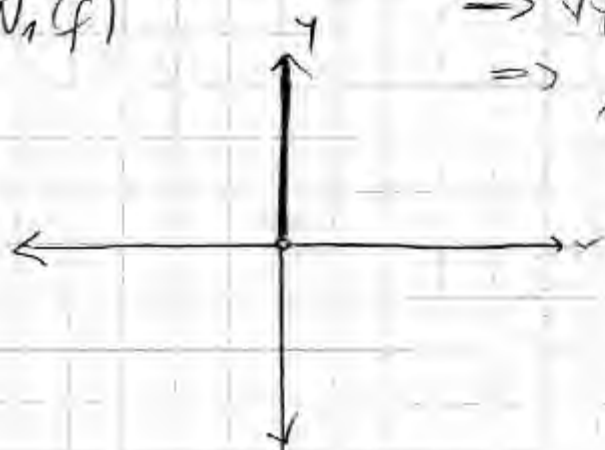
$$\Rightarrow -1 < 0$$

$$\Leftrightarrow V$$

Luego $\forall c \in \mathbb{R}, \exists N_c(f)$.

$c = 1 \Rightarrow 1 = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x}} \quad (y > 0)$

$N_1(f)$



$$\Rightarrow \sqrt{y^2 - x} = y \quad / ()^2$$

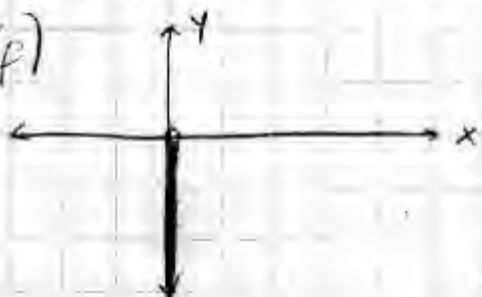
$$\Rightarrow y^2 - x = y^2$$

$$\Rightarrow x = 0 \wedge y > 0$$

$c = -1$

Análogamente $\Rightarrow x = 0 \wedge y < 0$

$N_{-1}(f)$



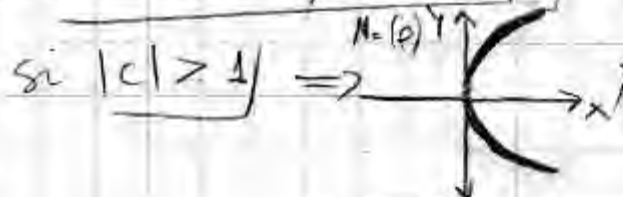
$N_1(f)$ y $N_{-1}(f)$

0,3 pto's

$c \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

$$x = \left(\frac{c^2 - 1}{c^2} \right) y^2$$

0,3 pto's



$|c| < 1 \Rightarrow$



(ii) Para (x, y) tal que $x < y^2$ f es continua por álgebra y composición de fncs continuas. (0,2 pts)

ahora, veamos si se puede tener continuidad en $(0,0)$.

Sea $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0,0)$, con $y_n \rightarrow 0$
 $x_n = y_n^2 - \frac{1}{n}$ (0,4 pts)

$$f(x_n, y_n) = \frac{y_n}{\sqrt{y_n^2 - y_n^2 + \frac{1}{n}}} = \frac{y_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n} \cdot y_n$$

tomando $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f(x_n, y_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

y $y_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f(x_n, y_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Se tiene que los límites son distintos y por lo tanto, f no puede ser continua en $(0,0)$. (0,4 pts)

b) (i) $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)$

$$= \left(-2(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -2(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (0,4 \text{ pts})$$

- $f(0,1) = 1 - (1-2)^2 = 0$

$f(3,4) = 1 - (5-2)^2 = -8$

$\nabla f(0,1) = (0, 2)$; $\nabla f(3,4) = \left(-\frac{18}{5}, -\frac{24}{5} \right)$

$T_{f(0,1)}: z = 0 + 0 \cdot (x-0) + 2(y-1)$
 $= 2y - 2$

(0,8 pts)

$$\pi_f(3,4): z = -8 - \frac{18}{5}(x-3) - \frac{24}{5}(y-4) = -\frac{18}{5}x - \frac{24}{5}y + 22 \quad (0,8 \text{ pts})$$

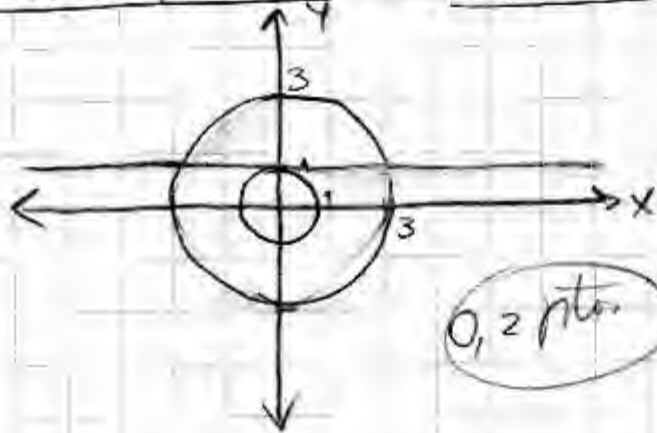
$$ii) N_0(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 = 1 - (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 \}$$

$$1 = (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - 2 = 1 \quad \vee \quad \sqrt{x^2+y^2} - 2 = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{x^2+y^2} = 3} \quad \vee \quad \boxed{\sqrt{x^2+y^2} = 1}$$

(0,6 pts)



(0,2 pts)

$$\pi_f(0,1): z = 2y - 2$$

$$z=0 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

(0,2 pts)